EXERCICE N°1 : 6 points 30 '

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;2]$ par : $f(x)=\frac{x^2+4}{2x}$

1) Etudier les variations de f et préciser l'asymptote de sa courbe $\mathscr{C}$

2) Montrer que f réalise une bijection de $]0;2]$ sur un intervalle J que l'on déterminera

3) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x et étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 2

4) Tracer dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les représentations graphiques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de f et sa réciproque f^{-1}

5) Soit l'application g définie sur l'intervalle $]0,\frac{\pi}{4}]$ par : $g(x)=f(2\tan x)$

a) Montrer que : $\forall x\in]0,\frac{\pi}{4}]$; $g(x)=\frac{2}{\sin(2x)}$

b) Montrer que g réalise une bijection de $]0,\frac{\pi}{4}]$ sur $[2,+\infty[$ et que la réciproque g^{-1} est dérivable sur $]2,+\infty[$ puis calculer $(g^{-1})'(x)$ en fonction de x

EXERCICE N°2 : 7 points 30 '

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

1) Etudier les variations de f puis montrer qu'elle réalise une bijection de l'intervalle $[1;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

2) Expliciter f^{-1} puis tracer les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ par : $g(x)=f(tg(x))$

a) Montrer que : $g(x)=\mathrm{Sin}(2x)$, et que g réalise une bijection de $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ sur $]0;1]$

b) Montrer que sa réciproque g^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ en fonction de x

EXERCICE N°3 : 7 points 40 '

Soit la fonction f définie sur l'intervalle : $]0;1[$ par : $f(x)=\cot g(\pi x)-\pi x$

1) Etudier les variations de f puis montrer qu'il existe un seul nombre α tel que $f(\alpha)=0$ et que $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$ En déduire le signe de f (x)

2) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $g(x)=x\cos(\pi x)$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

a) Dresser le tableau de variation de g et montrer que : $g(\alpha)=\dfrac{\pi\alpha^2}{\sqrt{1+\pi^2\alpha^2}}$

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ en prenant 2 cm comme unité graphique et en précisant les demi- tangentes aux points d'abscisses 0 et 1

3) On pose pour tout x de l'intervalle $\left]\frac{1}{2};1\right]$: $h(x)=\dfrac{x}{g(x)}$

a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]\frac{1}{2};1\right]$ sur l'intervalle $]-\infty,-1]$

b) Tracer dans un autre repère orthonormé les représentations graphiques de h et h^{-1}

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]-\infty,-1[$ et calculer $\left(h^{-1}\right)'(x)$ en fonction de x

EXERCICE N°4 : 7 points 40 '

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et par Δ la droite d'équation $y=x$

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ est équivalente à $x>1$ et $\left((x-1)^2+x\right)^2=2x^2$ puis montrer que $\mathscr{C}_f$ et Δ se coupent en un point unique dont on précisera l'abscisse

2) Etudier les variations de f et préciser les asymptotes de $\mathscr{C}_f$. En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera

3) Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées puis montrer que I est aussi centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$

4) Former l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en I puis tracer T, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$

5) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x

Tous droits réservés © TakiAcademy.com